

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DE VAN HIELE PARA O ENSINO- APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: ANÁLISE DE SUAS RELAÇÕES COM AS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC

Tainá Salves da Silva Arruda¹

Polyana Olini²

Larissa Silva Freire Spinelli³

Resumo: Este artigo debate a Teoria de Van Hiele, conhecida como níveis de pensamento geométrico, e suas contribuições para o ensino de geometria. Seu objetivo principal é propor relações entre esse modelo teórico e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente com as competências específicas da Área de Matemática e as habilidades em geometria propostas para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa de cunho bibliográfico, realizada por meio de análise documental e de literatura especializada, além do levantamento e estudo de pesquisas anteriores que abordaram os Níveis de Van Hiele e a BNCC. O artigo aborda o surgimento da geometria e aspectos relevantes para seu ensino-aprendizagem, como reformas curriculares e perspectivas para o ensino das ciências exatas no Brasil. Dentre os cinco níveis do pensamento geométrico, o artigo estabelece conexões e correspondências entre os três primeiros e o conjunto de conceitos e procedimentos da unidade temática de geometria propostos pela BNCC. Conclui-se que a teoria de Van Hiele oferece orientação para práticas pedagógicas que visam o aprimoramento do pensamento geométrico dos estudantes e o desenvolvimento de competências e habilidades em geometria formuladas pela BNCC, a serem desenvolvidas ao longo dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-chaves: Teoria de Van Hiele. Ensino da Geometria. BNCC. Educação Matemática.

Abstract: This paper discusses Van Hiele's Theory, knowing as levels of geometric thinking, and its contributions to geometry teaching. The main objective is to propose relations between this theoretical model and the Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especially with the specific competences of the Mathematics Area and the skills in geometry proposed for the initial years of Elementary School. This is bibliographic research, carried out through document analysis and specialized literature, in addition to the survey and study of previous research that addressed the Van Hiele Levels and the BNCC. This paper addresses the introduction of geometry and relevant aspects for its teaching-learning, such as curricular reforms and perspectives for teaching exact sciences in Brazil. Among the five levels of geometric thinking, this paper establishes connections and correspondences between the first three and the set of concepts and procedures of the thematic unit of geometry, proposes by the BNCC. As a result, Van Hiele's theory offers guidance for pedagogical practices aimed at improving students' geometric thinking and the development of competences and skills in geometry formulated by the BNCC, to be trained throughout the early years of Elementary School.

Keywords: Van Hiele's Theory. Geometry Teaching. BNCC. Mathematics education.

¹ Graduanda da Licenciatura em Pedagogia do Univag – Centro Universitário de Várzea Grande.

² Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Docente no Univag – Centro Universitário de Várzea Grande. Orientadora.

³ Doutora em Estudos Interdisciplinares de Cultura pela Universidade Federal de Mato Grosso. Docente no Univag – Centro Universitário de Várzea Grande. Co-Orientadora.

Considerações Iniciais

Este artigo resulta de uma pesquisa acerca do ensino-aprendizagem da geometria. Sua realização aborda desde como este objeto de conhecimento se fez necessário para o desenvolvimento do ser humano, sendo a geometria um conhecimento que auxiliou o progresso de diversas civilizações, até como essa disciplina da Matemática se faz presente nos dias atuais, uma vez que, com o passar dos anos foi se modificando e se tornando um complexo estudo dos conceitos geométricos e suas propriedades intrínsecas. Essa complexidade é refletida em seu ensinar e aprender, e costuma ser atenuada julgando a falta de práticas e o emprego de metodologias não adequadas para mediação da construção desse conhecimento.

Nesse sentido, destacam-se Dina Van Hiele-Geldof (1921-2010) e Pierre Van Hiele (1909-2010), professores e pesquisadores holandeses, que observaram que o processo de aprendizado da geometria envolve a aquisição gradual de diferentes níveis de compreensão e pensamento geométrico, desde a visualização básica até a compreensão formal e dedutiva. O Modelo de Van Hiele é uma estrutura teórica que descreve os estágios pelos quais os estudantes passam ao aprender geometria. Trata-se de uma teoria que destaca a importância do desenvolvimento de habilidades de visualização, raciocínio espacial e pensamento abstrato na aprendizagem da geometria.

Assim, o presente artigo está de acordo com as contribuições que a teoria de Van Hiele oferece sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico e destaca sua inovação para a área da Educação Matemática, por partir de algo mais sensível, isto é, por observar e partir da experiência dos estudantes para ensinar de maneira significativa.

De acordo com Moreira (2012) a aprendizagem irá ocorrer de fato de maneira significativa quando o professor levar em consideração o aprendizado prévio de seu ano, e oportunizar para ele meios para que possa ser inserido em novas experiências que irá proporcioná-lo vivenciar novos aprendizados.

No Brasil, o ensino da geometria por anos foi deixado de lado, em alguns casos passou a existir somente no final dos livros didáticos e, portanto, a ser realizado ao final do ano letivo. Isso ocorria porque não era do interesse social tornar os seus cidadãos críticos em sistemas formais de raciocínio lógico, o que

se buscava eram aprendizados que pudessem proporcionar aos estudantes capacidade para o trabalho físico em indústrias por exemplo, e que alguns ensinamentos considerados complexos da época eram designados ao um pequeno número de pessoas, como era o caso de estudantes pertencentes a classes sociais abastadas.

Até o início da década de 1960 o cenário encontrado era esse, que começou a mudar com a chegada do *Programa do Ensino Primário*, que para a Área da Matemática trouxe a valorização da geometria, visto que os seus conteúdos eram divididos em duas temáticas a geometria e a aritmética. No panorama brasileiro de educação e de vários outros países, a educação buscou renovação a partir da reforma curricular norte americana que teve forte influência do currículo soviético, que visava ênfase científica, principalmente nas áreas de exatas. Os alunos eram incentivados a realizar operações de forma exata e a obter resultados precisos. Esse enfoque proporcionou uma base sólida para o desenvolvimento de habilidades matemáticas posteriores. Contudo, o ensino primário no Brasil ainda era bastante influenciado por abordagens tradicionais, com um foco maior na transmissão de conhecimento pelo professor e na memorização de fórmulas e procedimentos. Nesse sentido, a matemática era ensinada de forma mais conteudista, com destaque para cálculos aritméticos e operações básicas, com uma abordagem mais formal e pouca ênfase em atividades práticas e manipulativas.

Embora o *Programa do Ensino Primário* no Brasil na década de 1960 tenha tido suas contribuições para o ensino da matemática, é importante ressaltar que as abordagens pedagógicas se desenvolveram desde então. Na história da educação brasileira, vários programas, decretos e documentos foram criados e desenvolvidos para aumentar o acesso e a qualidade, um deles é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC é um documento elaborado pelo Ministério da Educação que estabelece os direitos de aprendizagem e desenvolvimento dos estudantes, definindo os conhecimentos, competências e habilidades essenciais que devem ser trabalhados em todas as etapas da Educação Básica. Em resumo, a BNCC é um documento norteador que busca garantir uma educação de qualidade e alinhada às demandas do século XXI, oferecendo uma base sólida para o desenvolvimento integral dos estudantes e preparando-os para os desafios do

mundo contemporâneo (BRASIL, 2018).

É possível afirmar que as habilidades da BNCC se relacionam com a teoria de Van Hiele, visto que ambas estruturam o aprendizado de forma gradativa, que por meio de experiências genuínas buscam proporcionar um aprendizado único e significativo.

Atualmente, existem diferentes correntes pedagógicas que enfatizam uma aprendizagem mais ativa, significativa e contextualizada. A BNCC está afinada com tais abordagens contemporâneas no ensino da matemática, que buscam promover a resolução de problemas, o raciocínio lógico, a conexão entre conceitos matemáticos e o uso de tecnologias educacionais.

Nesse contexto, a escolha da temática dessa pesquisa remete aos estudos iniciados nas aulas do componente curricular *Conhecimentos básicos da Educação Matemática*, ministrada pela Profa. Dra. Carla Melissa Scalzitti, no Curso de Pedagogia, quem trouxe como referência para o ensino de geometria a Teoria de Van Hiele. O fato de ser uma teoria criada nos anos 1950, em outro país, mas que ainda hoje se demonstra eficaz para o ensino da geometria no Brasil, despertou o interesse inicial.

Essa pesquisa investiga como os níveis do pensamento geométrico criado pelos Van Hiele podem ser relacionados com o proposto pela BNCC. Principalmente nos três primeiros níveis da teoria, por estarem de acordo com as habilidades estabelecidas pelo documento curricular para respectivo aprendizado dos estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental. Assim, seu objetivo é fazer a análise das relações entre o modelo de Van Hiele e as competências e habilidades da BNCC. Para tanto, foram elencados os seguintes objetivos específicos: realizar um levantamento das publicações que compartilham da temática no ensino-aprendizagem em geometria; analisar as temáticas e conteúdos presentes nessas publicações; fazer relação entre as mudanças educacionais para o ensino da geometria que se fazem relevante até os dias atuais.

A pesquisa foi desenvolvida por meio de revisão bibliográfica, apoiando-se na BNCC, livros, artigos, teses e dissertações. As bases de dados consultadas foram: Google Acadêmico, Scielo e EBSCO. Os critérios para seleção do material pesquisado foram estabelecidos de acordo com os seguintes aspectos: 1º) autores importantes para a Área da Educação Matemática e para

o ensino da geometria; 2º) estudos recentes, em português e inglês, sobre a teoria dos Van Hiele; 3º) artigos sobre o ensino de geometria no Ensino Fundamental I e 4º) pesquisas que tiveram como objetos a BNCC e o modelo de Van Hiele.

Nesse sentido, a pesquisa faz uma análise das temáticas e dos conteúdos abordados durante a década de cinquenta até os dias atuais, a partir do estudo crítico de literatura especializada, por meio de revisão de literatura, pautada em abordagem qualitativa. Além da análise documental, da BNCC (2018), os principais autores consultados na revisão de literatura foram: Boyer (1974), Eves (1997), Nasser (2000), Nasser e Sant'anna (1997), Pavanello (1993), Pinto (2005), Valente (1999).

O artigo apresenta os resultados da pesquisa em seis tópicos. O primeiro expõe o surgimento da geometria em benefício de diversas civilizações e como esse conhecimento é necessário para o progresso da sociedade científica. O segundo aborda a reforma curricular norte americana, fortemente influenciada pelo currículo soviético, que trouxe grandes transformações para o ensino das ciências exatas. Na sequência, o terceiro tópico aborda um levantamento histórico em relação ao ensino da geometria no Brasil, e sua defasagem até a década de 1960. O quarto tópico expõe a teoria de Van Hiele e suas contribuições para o ensino da geometria. O penúltimo traz ensino da geometria sob a perspectiva das especificidades da BNCC. O sexto, e último, explicita relações entre os três primeiros níveis da teoria de Van Hiele com as habilidades da BNCC.

História da geometria e suas contribuições para o mundo

A matemática é um dos conhecimentos milenares que serviu a humanidade como ferramenta fundamental para o seu desenvolvimento. Existem por todo o mundo relatos que foram deixados ao longo da história e expõem como a matemática foi e ainda é importante para o avanço e progresso do mundo. Estudiosos da matemática, mais especificamente da geometria, constataam que tal conhecimento é utilizado para solucionar problemas há muito tempo, desde antes da civilização moderna.

De acordo com Eves (1997) o surgimento das consideradas primeiras reflexões sobre a geometria são muito antigas, sendo apontado como estopim

para o pensamento, a sensível capacidade de observação e reconhecer figuras, e comparar os seus formatos e tamanhos, concebendo desta forma um conceito básico da geometria, a noção de distância.

Os conhecimentos que a civilização obteve através da geometria foram precursores para um grande avanço social, atingindo as civilizações mesopotâmicas, a egípcia, a chinesa e a do Vale do Indo. A civilização do Vale do Indo que hoje se localiza entre o Paquistão e a Índia, foi uma das sociedades que mais usufruíram do conhecimento geométrico, pois utilizaram tal conhecimento para calcular as áreas de terras e o volume das águas, visto que construíram suas moradias em terras férteis próximas de vales de rios, isso proporcionou aquela civilização a necessidade de entender melhor a agricultura e o aproveitamento das águas, e isso levou aquele povo a praticar e desenvolver o conhecimento geométrico, visto que, as suas necessidades para uma vida melhor exigia compreensão superior sobre tal sapiência.

A geometria se fazia indispensável para qualquer ação que usaria determinadas noções matemáticas, e isso é visto principalmente em levantamentos históricos feitos no antigo Egito. É interessante ressaltar que a geometria, de uma maneira elementar, foi utilizada na Babilônia, na China, entre outros países, mas o status de raciocínio dedutivo surgiu no vale do rio Nilo, no Antigo Egito.

Isso aconteceu a partir dos artifícios praticados pelas civilizações egípcia, babilônica e chinesa que eram diretamente ligadas à agricultura da época e à engenharia do antigo Egito, que pode se considerar a primeira evidência do surgimento de um conhecimento geométrico sofisticado. Para Eves,

Esse nível mais elevado do desenvolvimento da natureza da geometria pode ser chamado "geometria científica" uma vez que indução, ensaio, erro e procedimentos empíricos eram instrumentos de descobertas. A geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns corretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre figuras sugeridas por objetos físicos. (EVES, 1997, p. 3)

A geometria se tornou um conhecimento presente na vida cotidiana até hoje, se mostra existente no dia a dia das pessoas, auxilia no melhor entendimento do universo que nos rodeia, é um conhecimento que ajuda

desenvolver o raciocínio lógico matemático. Esse tipo de raciocínio é exigido em todos os campos do conhecimento e em inúmeras situações do dia a dia e, apesar do nome, vai além da área de ciências exatas, sendo determinante para o desenvolvimento integral dos indivíduos.

Ao longo da história a matemática se consolidou enquanto ciência. Somente na Grécia Antiga como ciência organizada, nesse contexto apresentam-se relevantes para sua história os geômetras – os matemáticos que realizaram os estudos relacionados com a Geometria – como Arquimedes, Tales de Mileto, Euclides, considerado o pai da Geometria, entre outros. Esses pensadores, foram os responsáveis pela formulação de verdades básicas, referindo-se a esse conhecimento, que deram partida a postulados e teorias, como: a área sob o arco de uma parábola (Arquimedes), A aproximação do valor numérico do número pi (Arquimedes), o volume de superfícies de revolução (Arquimedes), o diâmetro que divide o círculo em duas partes iguais (Tales de Mileto), os ângulos opostos pelo vértice são iguais (Tales de Mileto), geometria euclidiana (Euclides).

Atualmente no que se refere a educação o ensino da geometria é primordial para o sustento e construção de uma cidadania plena e científica que busca evoluir constantemente para uma geração capacitada, próspera e moderna. Porém apesar de insidiosos fortíssimos e comprovados historicamente como é realçado anteriormente neste artigo, o ensino da geometria vem se mostrado não sendo explorado devidamente nas salas de aula, deixando de certa forma essa aprendizagem de lado e por vezes menosprezada dentro do componente da matemática.

Segundo Pavanello (1993), no Brasil tem acontecido a determinada adversidade em relação ao ensino, a geometria está sendo trabalhada nas salas de aula somente no final do ano letivo, como se tal conhecimento fosse menos complexo para ser ensinado e aprendido em pouquíssimo tempo ou se os seus conteúdos não fossem relevantes para a aprendizagem do ano em seu determinado nível escolar. A falta de recursos necessários para uma aprendizagem significativa e concreta e a capacitação não adequada dos professores da área, acabam por desempenhar um ensino simplificado, sem preocupação com a aprendizagem, e resumido na exibição de teoremas e na aplicação de fórmulas para a resolução de exercícios complexos demais, que

acabam por deixar o ensino desse conhecimento que é tão majestoso, transformando-o em um modo engessado de ensino e aprendizagem.

Os pontos levantados pelo autor evidenciaram o quão é grande a evasão do ensino da geometria, sendo esse conhecimento tão relevante para a evolução da humanidade. Pavanello (1993) Conclui ainda, que o ensino da geometria, que se apresenta em seus diferentes níveis, vem corriqueiramente desaparecendo do currículo das escolas, e que esse é um fato terrível para a educação no Brasil, tem ligação direta com o ensino-aprendizagem inadequados dos conteúdos geométricos, que por consequência gera a ausência dessa ciência nos temas de programas escolares.

Para Vygotsky (1998) o ensino de conceitos sem a vivência de experiência é impossível, e que determinado meio de prática vem se mostrando durante tempos como ineficazes e que os resultados obtidos através deste modo de ensinar traz uma comunicação por vezes vazia e sem tal significância, transferindo um emaranhado de palavras complexas que não estão de acordo com o vocabulário e o entendimento daqueles estudantes naquele momento.

Reforma do currículo soviético: a reestruturação curricular norte americana e os reflexos deixados para a educação

Segundo Rudolph (2002), o lançamento do satélite Sputnik que foi o primeiro satélite desenvolvido pelo programa espacial soviético também o primeiro satélite artificial a orbitar a terra após seu lançamento em 1957, gerou uma cadeia de eventos que iria mudar o cenário do ensino de ciências presente nos Estados Unidos, e por consequência acabou respingando por todo o mundo. Com o lançamento do satélite a maioria dos americanos acreditavam que a sua supremacia de ciência e tecnologia havia sido ultrapassada pela União Soviética, e a reação da população estadunidense veio em formato de críticas ao ensino de ciências. Consideravam que o ensino entregue pelo país não chegava nem perto do que era proposto pelo rigoroso e científico ensino soviético, e foi justamente nesta época que o ensino secundário vivenciado no Estados Unidos foi identificado como o responsável pela decadência do ensino americano.

Nesse período, o enfoque do ensino era preparar o aluno para a vida. De 1947 a 1954 a educação do país vivenciou o movimento *Educação para a Vida*, movimento pedagógico que propunha desenvolver um ensino baseado nos

interesses e na saúde mental do aluno. Tinha como embasamento teórico um compilado de ideias que defendiam um ensino focado na criança, um dos aspectos trazidos por John Dewey.

Conforme DeBoer (1991), em efeito a este movimento pedagógico o ensino que era oferecido no país deixou de considerar o ensino das ciências em si, para contemplar em um ensino que era voltado para a vida cotidiana. Com a decorrência do movimento reflexos foram vivenciados e empregados dentro dos próprios livros didáticos utilizados nas escolas entre as décadas de 1940 à 1950, em que os conteúdos de Física por exemplo, eram voltados para funcionamento de máquinas em fábricas e conserto de automóveis, e os conteúdos trabalhados em Biologia eram voltados para o ensino da utilidade e aproveitamentos dos organismos vivos desenvolvidos nos textos do livro.

E em virtude da busca de desenvolver uma sociedade mais científica e solucionar essa defasagem do ensino científico tecnológico presente na educação do país, a resposta em solução veio a partir, do ideal de reestruturar o currículo educacional e desta forma enfatizar o desenvolvimento intelectual do estudante, e em setembro 1959 o presidente Eisenhower assinou o Ato de Defesa Nacional que designou 1 bilhão de dólares que seriam voltados para pesquisa de educadores designados para melhoramento da ciência e do ensino secundário do país, e todos os projetos em decorrência das pesquisas levam a caracterização de materiais especializados como livros didáticos, guia para professores, equipamentos para laboratórios, estudos de casos, materiais desenvolvidos para estudantes com deficiência e outros.

Esses acontecimentos levam o país a um progresso expressivo no cenário educacional, que posteriormente serviu como inspiração para muitos outros países que empregam um sistema educacional similar. No Brasil, é possível verificar sua influência no *Programa do Ensino Primário* nos anos 1960, que buscava transformar o ensino, em prol da formação de cidadãos mais conhecedores dos conteúdos científicos.

De acordo com Krasilchik (1980) essa reforma do currículo norte americano enfatizou a importância de se agregar o conhecimento no processo de investigação científica na educação do cidadão comum, que poderia usufruir de tal sapiência não apenas para solucionar problemas pouco complexos, mas sim, torna-se cientificamente crítico, capaz de julgar e decidir com base fatos, e

elaborar diversas vertentes para encontrar soluções plausíveis para tais problemas, seria capaz de se portar criticamente em sua coletividade social.

Transformações no ensino de geometria: reformas do ensino brasileiro

Para abordar o ensino-aprendizagem da geometria vivenciado no Brasil em 1950, é necessário voltar duas décadas a fim de dar adequada introdução ao contexto histórico.

A década de 1930 foi marcada por experiências relevantes para o cenário do ensino da matemática no Brasil, pois, esse período foi marcado pela consolidação de reformas de ensino guiadas por um ideal que acreditava-se criar uma espécie de construção de base de ensino nacional dentre as exigências estabelecidas para se obter acesso ao ensino secundário, que em estância era dependente do Exame de Admissão, que era composto de provas escritas e orais de Português, Aritmética e Conhecimentos Gerais, de acordo com o Decreto nº 19.890 de 18 de abril de 1931- Reforma Francisco Campos (VALENTE, 2001).

Valente (2001) ainda afirma que as provas de matemática do exame de admissão focavam em verificar os conhecimentos básicos dos alunos em matemática, levando em consideração o essencial para que dê continuidade aos seus estudos para ingressar ao nível secundário, sendo assim, o que se esperava daquele estudante, que ele possuisse determinado domínio em operações fundamentais e certa desenvoltura no cálculo. Com o decorrer do tempo essa avaliação escolar se tornou mais e mais complexa para o aprendizado prévio dos estudantes, e a consequência gerada por esse tipo de classificação escolar gerou uma delimitação da população, da seguinte forma, aqueles que conseguiriam vencer essa fase e futuramente ingressar ao ensino superior brasileiro e aqueles que ficariam por ali, com apenas aquela base de ensino.

Pinto (2005) destaca que entre os anos de 1931 a 1943 as provas realizadas de matemática para o exame de admissão ao ginásio seguiam um ideal, de acordo com ele o que deveria ser valorizado eram os cálculos das operações fundamentais, o uso do sistema monetário, o sistema métrico de medidas, as representações fracionária e decimal dos números racionais, pois

esses conteúdos eram vistos como relevantes para aprendizado do brasileiro, visto que esses conteúdos eram cobrados dos estudantes em forma de situações problema, que se faziam presentes no contexto sociocultural do Brasil. As práticas avaliativas do ensino da matemática visavam o conhecimento dos alunos em questões menos contextualizadas, dentro de um currículo limitado, no qual desapareciam questões que contemplassem o trabalho e o estudo da geometria. Assim, sobre esse período,

podemos dizer que se esperava que a escola proporcionasse aos jovens a formação necessária para se tornarem trabalhadores nos campos, nas fábricas ou nas lojas. Era sobretudo importante desenvolver, na generalidade dos alunos, competência básica na leitura, na escrita e na aritmética. Os estudos mais avançados estavam destinados a um pequeno número de alunos privilegiados para os quais se desenhavam desde cedo, grandes possibilidades de virem a ocupar lugares de destaque ao nível cultural, político e econômico. (PORFÍRIO, 1998, p. 33)

A partir dos anos 1960 o sistema educacional começou a mudar em relação ao ensino-aprendizagem da geometria com a chegada do *Programa do Ensino Primário* (Decreto-lei nº 43, 994, de 28 de maio de 1960) o sistema de ensino da matemática nesse novo programa estava estabelecido da seguinte forma: o ensino seria estruturado em dois grandes temas, o da aritmética e o da geometria.

Na época, o programa educacional era baseado principalmente na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) de 1961⁴ e nas políticas educacionais vigentes. Como abordado anteriormente, o contexto histórico e social da época influenciou a maneira como a matemática era ensinada. Algumas características desse período e suas possíveis contribuições para o ensino da matemática, são: a. ênfase no ensino tradicional com um foco maior na transmissão de conhecimento pelo professor e na memorização de fórmulas e procedimentos; b. valorização da exatidão e precisão, essa abordagem contribuiu para o desenvolvimento de habilidades matemáticas básicas e para o entendimento da importância da exatidão nos cálculos; c. ênfase nos fundamentos da matemática, esse enfoque proporcionou uma base sólida para

⁴ Essa primeira LDB foi revogada posteriormente por uma nova legislação, mas sua influência e princípios básicos ainda são considerados relevantes na atual LDB, Lei nº 9.394, promulgada em 1996 e em vigor.

o desenvolvimento de habilidades matemáticas posteriores; d. abordagem linear de conteúdos no currículo, em que os conceitos matemáticos eram apresentados de forma sequencial e progressiva, uma forma de possibilitar que os alunos avançavam de um tópico para outro à medida que dominem os conceitos anteriores; e. utilização de materiais didáticos – como livros e cadernos – geralmente de natureza tradicional, com uma abordagem mais formal e pouca ênfase em atividades práticas e manipulativas.

Especificamente sobre o ensino de geometria o programa indica que esta

[...] não pode ser ensinada pelo método que lhe é próprio, isto é dedutivamente. A isso se opõe o caráter elementar do programa, por sua vez imposto pela idade dos alunos. Os processos a utilizar serão: observação, análise, e ainda a imaginação criadora das crianças. (BRASIL, 1960, p. 34)

Dessa forma, no contexto desse programa é possível verificar os primeiros indícios da influência mesmo que implícita de uma metodologia empregada a partir da teoria de Van Hiele. No que era proposto como prática, utilizou-se metodologias que trabalhassem por meio da observação, e da análise, esses dois pontos estão dentro dos níveis da aprendizagem e do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o exposto na pesquisa de Dina e Pierre Van Hiele.

A teoria de Van Hiele e suas contribuições para o ensino-aprendizagem da geometria

O modelo do pensamento geométrico dos Van Hiele começou a ser escrito e desenvolvido nos anos 1950 na Holanda diante das pertencentes teses de doutorado do casal de pesquisadores, sendo que enquanto a tese de Pierre buscava, primordialmente, explicar e descrever o porquê os alunos tinham problemas para aprender Geometria, a tese de Dina se ocupava de um experimento educacional. Sob a orientação, do professor Hans Freudenthal, fizeram descobertas expressivas diante das dificuldades dos estudantes em relação ao conteúdo do ensino da geometria.

O que se constitui dentro da pesquisa feita pelos professores gerou uma teoria de aprendizagem significativa da geometria. Perante a observação crítica do dia a dia dos estudantes do Ensino Fundamental eles criaram um modelo,

uma espécie de pirâmide do desenvolvimento do conhecimento. Concluíram então que teoricamente o conhecimento da geometria aconteceria de forma genuína se fosse desenvolvida e trabalhada a partir de níveis hierárquicos de compreensão do saber geométrico, que se constituía em cinco diferentes níveis de compreensão. São eles: 1° *Reconhecimento*, 2° *Análise*, 3° *Dedução Informal*, 4° *Dedução*, 5° *Rigor*. A progressão pelos níveis de pensamento geométrico é considerada um processo gradual e cada nível é construído sobre a base do anterior, fornecendo aos estudantes uma compreensão mais profunda e abrangente da geometria.

Segundo Nasser e Sant'anna (1998), por meio desses cinco níveis de pensamento geométrico os estudantes progredem à medida que adquirem conhecimentos geométricos mais avançados. O primeiro nível, o *Reconhecimento*, envolve a capacidade de identificar e descrever objetos geométricos com base em suas características básicas, como forma, tamanho e cor. No segundo nível, a *Análise*, os estudantes começam a explorar as relações entre os elementos geométricos e a classificar as formas com base em suas propriedades comuns. O terceiro nível, a *Dedução Informal*, é caracterizado pelo uso de argumentos lógicos e justificativas informais para estabelecer conexões entre as propriedades geométricas. No quarto nível, a *Dedução*, os estudantes são capazes de formular argumentos rigorosos e dedutivos, utilizando proposições, teoremas e provas formais para justificar suas conclusões. Por fim, o quinto nível, o *Rigor*, representa o mais alto grau de compreensão geométrica, em que os estudantes são capazes de se envolver em um pensamento abstrato, utilizando abordagens axiomáticas e demonstrações matemáticas formais para aprofundar ainda mais sua compreensão dos princípios geométricos.

É importante ressaltar que os três primeiros níveis são correspondentes com o desenvolvimento do conhecimento da geometria proposto pela BNCC, para a etapa⁵ dos anos iniciais do Ensino Fundamental (1º ao 5º ano) e, portanto, se enquadra no problema de pesquisa investigado neste artigo.

⁵ As etapas da Educação Básica são divisões sequenciais que correspondem a diferentes momentos da formação educacional de um estudante. São elas: Educação Infantil Creche (0 a 3 anos) e Pré-escola (4 e 5 anos); Ensino Fundamental Anos Iniciais (1º ao 5º ano) e Anos Finais (6º ao 9º ano); Ensino Médio. A BNCC também prevê a oferta das modalidades: Educação Especial, Educação de Jovens e Adultos (EJA) e Educação Profissional Técnica de Nível Médio. Cada etapa possui diretrizes e objetivos específicos, indicando os conhecimentos e habilidades que os estudantes devem adquirir em cada fase de sua formação. Além disso, a BNCC

No Brasil, a teoria de Van Hiele foi reconhecida e disseminada a partir em meados dos anos 1990, através do *Projeto Fundação*⁶ da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), que realiza atividades de Extensão Universitária na área de formação continuada de professores de Matemática. Nas ações desse projeto, a teoria foi divulgada e apresentada como guia prático para professores da área.

Segundo o que aponta Nasser (1998) a aprendizagem da geometria de acordo com a teoria dos Van Hiele só aconteceria se os alunos seguissem a hierarquia da aprendizagem, ou seja, conseguiriam passar de um nível para o outro se tivessem de fato vivenciado toda a experiência proposta e determinados níveis. Nessa perspectiva, uma vez concebido todo conhecimento oferecido no determinado nível anterior à sua sucessão, seria possível vislumbrar a(s) dificuldade(s) dos estudantes para entender o conteúdo proposto, pois dependendo do planejamento do professor e do material oferecido, o estudante pode ser introduzido em um aprendizado muito complexo, sem ter a base dos conhecimentos prévios existentes na experiência que os níveis anteriores poderiam proporcionar-lhes.

A geometria na BNCC: competências e habilidades propostas como Unidade Temática

A Base Nacional Comum Curricular traz como definição de sua função disponibilizar e determinar conhecimentos, competência e habilidades primordiais para Educação Básica no Brasil, um país que assegura o direito à educação como um direito fundamental de todos os cidadãos. Segundo o exposto no documento isso deve ocorrer por meio do ensino alicerçado no ensino por competências e na educação integral.

As competências são apresentadas como mobilizações dos conhecimentos, ou seja, o aluno deve estar conectado diretamente com o

estabelece as competências gerais, que são habilidades transversais que os estudantes devem desenvolver ao longo de toda a Educação Básica, como pensamento crítico, criatividade, colaboração, ética, entre outras.

⁶ O projeto tem como objetivo desenvolver recursos e ferramentas que possam auxiliar estudantes e professores no ensino e aprendizagem de matemática, especialmente no ensino médio. É possível encontrar mais informações sobre a origem, desenvolvimento e resultados alcançados pelo *Projeto Fundação* no link: (<http://www.matematica.projetofundao.ufrj.br/historico/>).

conhecimento, a fim de assemelhar-se a aprendizagem de forma mais complexa. Enquanto as habilidades se apresentam como os conhecimentos necessários para o desenvolvimento genuíno das competências. Juntos os dois conceitos têm por objetivo proporcionar o desenvolvimento e domínio em determinado contexto. (BRASIL, 2018)

No que diz respeito à Área da Matemática, na etapa do Ensino Fundamental, oito competências específicas são apresentadas na BNCC, quais sejam:

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções [...].
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento [...].
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento [...].
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens [...].
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários [...].
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2018, p. 263).

Essas competências têm como objetivo de promover o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais para a vida em sociedade, permitindo que os estudantes sejam capazes de resolver problemas, tomar decisões

fundamentadas e compreender o mundo ao seu redor de maneira crítica e analítica.

A partir disso, a BNCC apresenta os conteúdos, os objetivos de aprendizagem e as unidades de ensino de forma organizada e progressiva, levando em consideração as diferentes etapas da Educação Básica. No Ensino Fundamental, a matemática é dividida em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Tratamento da Informação. Essas unidades são trabalhadas de forma integrada, com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico, a resolução de problemas, a capacidade de argumentação e a compreensão dos conceitos matemáticos.

De acordo com a BNCC nos anos iniciais do Ensino Fundamental a aprendizagem da matemática busca resgatar de forma sensível as vivências cotidianas dos Estudantes com os números, formas e espaço, e a experiências obtidas durante educação infantil, para que desta forma seja possível dar início a uma sistematização mais complexa das determinadas noções matemáticas designadas para esta fase da educação.

Em conformidade com o documento, a unidade temática da geometria é uma área do conhecimento matemático tão essencial para o desenvolvimento humano como as outras. O ensino-aprendizagem dessa unidade temática deve ocorrer por meio da localização e movimento de pessoas e ou objetos no espaço, fazendo uso de diversas referências e de um vocabulário adequado com o entendimento do estudante, apoiando-se em figuras geométricas espaciais e planas.

Para que a aprendizagem ocorra de forma efetiva, tanto as práticas como os conteúdos devem ser acessíveis de forma significativa, segundo Ausubel (1963) a aprendizagem significativa irá acontecer quando há uma relação entre os conhecimentos novos aos conhecimentos prévios do aluno, ou seja, quando o estudante consegue desenvolver capacidade para ampliar aquele conhecimento anterior e atribuir novos significados aos novos.

É possível aproximar a noção de aprendizagem significativa da teoria Van Hiele, pois para essa perspectiva da aprendizagem da geometria, o estudante deve vivenciar a experiência do conhecimento prévio, para que posteriormente possa, por meio da mediação docente, ser apresentado a experiências de

conhecimentos futuros que o levariam a avançar de nível conforme o seu desenvolvimento do pensamento geométrico. (cf. HIELE, 1986).

Segundo Nasser e Sant'anna (1998) para que o ensino da geometria possa ser trabalhado de forma a mediar a construção de conhecimentos com os estudantes, se faz necessário possibilitar ao estudante o contato com atividades de cunho investigativo, que o leve a observação do universo que o rodeia, de forma crítica, identificando todas formas geométricas existentes no próprio ambiente em que ele se encontra, podendo ser a sua própria sala de aula, fazendo a correlação entre o seu conhecimento prévio com os conhecimento novos.

Relações entre as habilidades da BNCC e os níveis do pensamento geométrico de Van Hiele

As habilidades, da Área de Matemática e suas Tecnologias da BNCC⁷, trabalhadas com fundamentação na teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, dos Van Hiele, e desenvolvidas desde o início da escolarização, poderá proporcionar um aprendizado bem mais significativo para os estudantes, pois será meio de oportunizar um ensino cheio de vivências, por se tratar de uma aprendizagem que ocorre através da experiência com o conhecimento.

Por meio da busca nas bibliotecas digitais, apenas três publicações resultantes de pesquisas que tiveram como objeto a BNCC e o modelo de Van Hiele foram localizadas. Conforme se apresenta o quadro abaixo:

Quadro 1 – Publicações que explicitam conexões entre a BNCC e a Teoria de van Hiele.

AUTORIA	TÍTULO	DADOS DE PUBLICAÇÃO
PONTES, J. S. CAMPOS, C. R.	Proposta de formação em geometria para os professores dos anos iniciais do ensino fundamental.	<i>Ensino Da Matemática Em Debate</i> , v.5, n. 1, p. 54–68. 2018.
KUHN, M. C. QUADROS, B. M.	Geometria nos anos iniciais: possíveis conexões teóricas e prática.	<i>Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática</i> , v. 13, n. 3, p. 246 – 254, 2020.

⁷ As habilidades da BNCC são organizadas por áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, e Ensino Religioso. Cada área do conhecimento possui habilidades específicas relacionadas ao desenvolvimento de competências e conhecimentos específicos daquela área.

LARA, V. L.	Relações entre habilidade da BNCC e a Teoria de Van Hiele: propostas de atividades para o Ensino Fundamental I.	<i>Monografia (Licenciatura)</i> . Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. Graduação em Matemática, 2021.
-------------	---	--

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Duas dentre as três, buscaram explicitar conexões entre o proposto pela base e o Modelo de Van Hiele e por isso foram analisadas na presente pesquisa de conclusão de curso.

A primeira, artigo de autoria de Kuhn e Quadros (2020), apresenta uma pesquisa qualitativa sobre o ensino de geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com o objetivo de capacitar os professores como mediadores na construção do conhecimento geométrico. O artigo em questão explora a teoria dos níveis de conhecimento geométrico de Van Hiele, por meio de uma pesquisa bibliográfica, identificando possíveis associações entre as habilidades da BNCC e os níveis de Van Hiele. Além disso, os autores propuseram atividades para a sala de aula que permitem aos professores avaliar o nível de compreensão dos estudantes.

A segunda consiste em uma monografia, defendida em 2021, de autoria de Victor Lima Lara, defende uma relação entre as habilidades em geometria do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental, conforme estipulado pela (BNCC), e os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico propostos por Van Hiele. Além de estabelecer essa relação, o trabalho de conclusão de Licenciatura em Matemática também apresenta sugestões de atividades que podem auxiliar no desenvolvimento das habilidades e ajudar os professores a identificar em qual nível de pensamento geométrico cada estudante se encontra ou já dominou.

A terceira (PONTES; CAMPOS, 2018) se concentrou na proposição de uma formação em geometria destinada aos professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e para organizar seus objetos de conhecimento partiu de documentos curriculares oficiais, como a BNCC e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

A organização das habilidades na Base Nacional Comum Curricular, especialmente as designadas para os anos iniciais do Ensino Fundamental, pode

ser entendida em paralelo, de forma linear, ao explicado nos três primeiros níveis do desenvolvimento do pensamento geométrico estabelecido pelos Van Hiele.

No primeiro nível, o *Reconhecimento*, os estudantes identificam as formas geométricas observando, e conseguem diferenciá-las apenas por sua aparência, dando nome às formas. Conseguem reconhecer, descrever, comparar e classificar os polígonos por meio de suas formas, porém não são capazes de identificar as propriedades existentes nas formas, acabam por desenvolver um vocabulário geométrico bem básico, fazendo relação com objetos e formas do seu dia a dia.

O estudo do material pesquisado permite afirmar que o se propõe no nível de *Reconhecimento* condiz com as seguintes habilidades da BNCC (BRASIL, 2018): (EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. (EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial. (EF02MA12) Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência, e indicar as mudanças de direção e de sentido.

O segundo nível, chamado *Análise*, compreende o momento em que os estudantes serão capazes de analisar as propriedades existentes nas figuras geométricas através da comparação, e irão entender a simbologia que cada uma figura possui, podendo descrevê-las, porém ainda não serão capazes de fazer uma relação entre as formas geométricas e suas propriedades, ou seja, desenvolveram uma análise informal a partir da sua experiência com o conhecimento.

Assim, de acordo com a literatura analisada, o que é proposto como aprendizado no segundo nível da teoria se encaixa com o que é oferecido como ensino-aprendizagem das seguintes habilidades da BNCC (BRASIL, 2018): (EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetos ou utilizando croquis e maquetes, a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência. (EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de

peças e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.

No terceiro nível, chamado *Dedução Informal*, explica que é justamente nesse nível que os estudantes poderão fazer a relação entre as figuras geométricas e suas propriedades, fazendo uma ordenação lógica delas, porém eles não entendem a forma complexa de sua dedução, podendo fazer demonstrações do seu entendimento sobre o assunto de diversas maneiras.

Esse nível do pensamento geométrico pode ser compreendido como conectado com o trabalho proposto pelas seguintes habilidades da BNCC (BRASIL, 2018): (EF05MA14) Utilizar e compreender diferentes representações para a localização de objetos no plano, como mapas, células em planilhas eletrônicas e coordenadas geográficas, a fim de desenvolver as primeiras noções de coordenadas cartesianas. (EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1º quadrante), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

Considerações Finais

A teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, criada por Dina e Pierre Van Hiele, foi inovadora, visto que no período da pesquisa realizada pelos professores holandeses o cenário vivenciado na área da educação, nos anos 1950, era moldado por um currículo tradicional e engessado. Assim, em oposição a esse currículo, isto é, a partir do aluno e não do professor, foi estruturada a teoria ao se sensibilizar com os conhecimentos prévios dos estudantes para então, guiá-los por novas experiências e potencializar os seus aprendizados com a geometria. Tratou-se de uma forma genuína de vislumbrar um novo cenário educacional em que aqueles alunos estavam inseridos e mediar meios de como aquela aprendizagem poderia ocorrer de forma fluida, não apenas para estudantes, mas também para os professores. A teoria de Van Hiele se tornou um guia prático e um facilitador para professores ensinarem geometria. Porém, no Brasil tais meios facilitadores de ensino-aprendizagem, assim como

uma perspectiva que de fato valoriza o conhecimento geométrico como valioso para o desenvolvimento humano, demoraram para se popularizarem.

Dessa forma, pontua-se que a Teoria de Van Hiele é de suma relevância para o ensino da geometria não apenas no Brasil, mas sim em todo o mundo. Contribui para o escopo de diversas práticas educacionais, auxiliando no desenvolvimento de aprendizagens significativas, sendo possível empregá-la como guia e embasamento ao trabalho pedagógico desenvolvido em consonância com a BNCC.

Na busca de alcançar os objetivos desta pesquisa, ao analisar o contexto histórico do ensino da geometria como desafiador e, por muito tempo ineficiente, houve melhor compreensão sobre os acontecimentos que contribuíram para isso, como a falta de qualificação de profissionais da área, a visão reducionista do ensino e da aprendizagem, a falta de comprometimento e interesse social no ensino da geometria, currículos conteudistas que visavam não o desenvolvimento de cidadãos críticos na área de exatas, mas sim mão de obra qualificada.

Frente a essa reflexão, é possível afirmar que quando os professores e professoras buscam fundamentação e crítica na teoria de Van Hiele para pensar o ensino da geometria, bem como para elaborar atividades e metodologias adequadas, contribuem com a construção de um enriquecido conhecimento geométrico. Nesse sentido, os níveis da teoria servem como base norteadora para os professores quando são contemplados em relação com o que é proposto pela BNCC. A partir da observação do nível de vivência dos estudantes, eles poderão potencializar o aprendizado.

Enfim, afirma-se que hoje o ensino da geometria, passado por modificações durante as últimas décadas, é parte da história do desenvolvimento humano e que o seu aprendizado é fundamental para o futuro científico e próspero da sociedade.

Referências

AUSUBEL, D. P. **The Psychology of Meaningful Verbal Learning**. New York: Grune & Stratton, 1963.

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgard Blücher Ltda., 1974.

BRASIL, Secretaria de Educação e Cultura. **Programas Ensino Primário Elementar**. São Paulo, 1960.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

EVES, Howard. **Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. Tradução Hygino H Domingues. São Paulo, Atual, 1997.

HIELE, P. M. V. **Structure and insight: a theory of mathematics education**. Nova York: Academic Press, 1986.

KRASILCHIK, Myriam. Inovações no ensino de ciências. In: GARCIA, Walter. (Coord.) **Inovação educacional no Brasil: problemas e perspectivas**. São Paulo: Cortez e Autores Associados, 1980.

KUHN, Malcus Cassiano; QUADROS, Bruna Mendel. Geometria nos Anos Iniciais: Possíveis Conexões Teóricas e Práticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 3, p. 246 – 254, 2020.

LARA, Victor Lima. **Relações entre habilidade da BNCC e a Teoria de Van Hiele**: propostas de atividades para o Ensino Fundamental I. Monografia (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas. 2021.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? **Quriculum** n. 25, p. 29-56, 2012. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf>. Acesso em: 11/06/2023.

NASCIMENTO, E. C. **O desenvolvimento do pensamento geométrico, interação social e origami**. São Paulo, Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática., 2016.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. Rio de Janeiro, RJ: UFRJ, 1997.

NASSER, L, et al. **Geometria segundo a teoria de van Hiele**. Rio de Janeiro, 3 ed. Instituto de Matemática/UFRJ: Projeto Fundação, 2000.

PAVANELLO, R. M. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências. **Revista Zetetiké**. Campinas: UNICAMP/FE/CEMPEN, v.1, n.1 Marco, p. 7-17, 1993.

PINTO, Neuza Bertoni. **Marcas Históricas da Matemática Moderna no Brasil**. Paraná, PUCPR, 2005.

PONTES, J. S. de; CAMPOS, C. R. Proposta de formação em geometria para os professores dos anos iniciais do ensino fundamental. **Ensino Da Matemática Em Debate**, v.5, n. 1, p. 54–68. 2018.

PORFIRIO, 1998.

RUDOLPH, John. **Scientists in the classroom**: the cold war reconstruction of american science education. New York, Palgrave, 2002.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da Matemática Escolar no Brasil, (1730 – 1930)**. Tese de doutorado. São Paulo: Annablume, 1999.

VYGOTSKY, L.S; LURIA, A.R. & LEONTIEV, A.N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone: Editora da Universidade de São Paulo, 1998.